Savoir QUAND s'arrêter

Theodore Hill

Toute décision comporte des risques. Choisir le meilleur moment pour agir ou pour se retirer est crucial. Quand une entreprise d'informatique élabore une nouvelle version de son logiciel phare, elle doit décider quand s'arrêter de la parfaire et la mettre sur le marché. Lorsqu'un cyclone s'approche, les autorités doivent déterminer quand il est temps de commencer à évacuer. Un mauvais choix peut se solder par un désastre. Napoléon en a fait la triste expérience après avoir envahi la Russie. Avec des conséquences moins graves, nous sommes constamment confrontés à des décisions d'arrêt, que nous cherchions une meilleure place de stationnement, répondions à une offre d'emploi ou préparions notre départ à la retraite.

Tous ces problèmes s'inscrivent dans un même cadre : un processus évolue dans le temps en faisant intervenir une part d'aléas et, en se fondant seulement sur l'information disponible, on doit décider comment maximiser la récompense ou minimiser le coût. Parfois, on dispose de peu d'information sur la suite des événements. Dans d'autres cas, l'information abonde. Personne ne prédit l'avenir avec une certitude absolue, mais, heureusement, la puissance de la théorie des probabilités augmente parfois les chances de faire le bon choix.

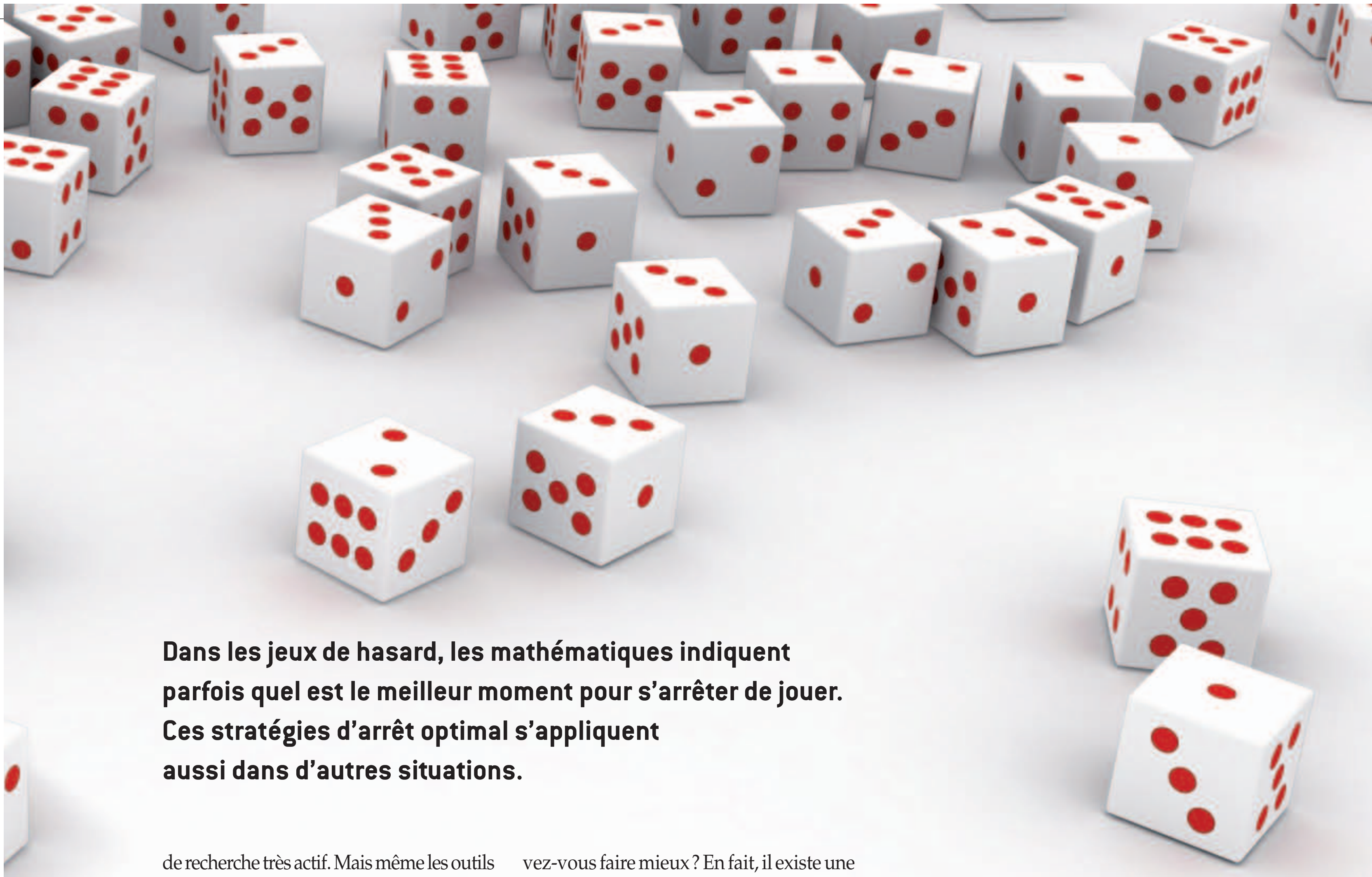
La science des probabilités est assez récente. L'un des premiers écrits sur les probabilités, *De ludeo aleae* de l'Italien Jérôme Cardan, datant de 1564 et qui dut attendre un siècle avant d'être publié, analyse essentiellement les jeux de dés. On attribue généralement les débuts mathématiques des probabilités à un échange de lettres en 1654 entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat. Eux aussi s'intéressaient aux probabilités en relation avec les lancers de dés, pour déterminer par exemple s'il est raisonnable de parier un contre un qu'un double six se réalisera en 24 lancers de deux dés non pipés. Certains soutenaient que oui, mais la véritable probabilité d'obtenir un double six en 24 lancers est d'environ 49,1 pour cent.

Cette correspondance a inspiré d'importantes avancées réalisées par d'autres mathématiciens au XIXe siècle. Cependant, il a fallu attendre longtemps une définition suffisamment précise des probabilités pour être utilisable efficacement en mathématiques ou dans les sciences expérimentales : ce n'est qu'en 1933 que le mathématicien russe Andreï Kolmogorov a donné aux probabilités un fondement axiomatique formel.

L'histoire des problèmes d'arrêt optimal, une branche de la théorie des probabilités, a également pour point de départ les jeux de hasard. L'une des premières découvertes est due au mathématicien anglais Arthur Cayley. En 1875, il trouva une stratégie d'arrêt optimal pour l'achat de billets de loterie – stratégie à laquelle on trouva peu à peu des applications plus larges.

Durant la Seconde Guerre mondiale, l'Américain d'origine hongroise Abraham Wald et d'autres mathématiciens ont développé le domaine de l'analyse séquentielle statistique pour aider les militaires et les industriels confrontés à des paris stratégiques faisant intervenir des quantités énormes d'hommes et de matériel. Peu après la guerre, l'Américain Richard Bellman a inventé la programmation dynamique afin d'obtenir des stratégies optimales pour de nombreux autres problèmes d'arrêt. Dans les années 1970, la théorie de l'arrêt optimal s'est érigée au rang d'outil essentiel dans la finance quand Fischer Black et Myron Scholes ont découvert une formule pionnière pour évaluer les actions boursières. Cela a transformé les marchés financiers du monde entier, et a valu à M. Scholes et son collègue Robert Merton le prix Nobel 1997 d'économie (Black était décédé entre-temps).

La formule de Black-Scholes est aujourd'hui au fondement de l'évaluation des options financières, et les outils d'arrêt optimal qui la sous-tendent restent un domaine



© Shutterstock/3dts

Dans les jeux de hasard, les mathématiques indiquent parfois quel est le meilleur moment pour s'arrêter de jouer. Ces stratégies d'arrêt optimal s'appliquent aussi dans d'autres situations.

de recherche très actif. Mais même les outils élémentaires de la théorie de l'arrêt optimal offrent déjà des solutions puissantes, pratiques et parfois surprenantes.

Supposons que vous soyez une femme ayant décidé de se marier, et que pour sélectionner l'homme de votre vie, vous ayez un entretien avec un maximum de 100 candidats. Les entretiens sont conduits dans un ordre aléatoire, et vous n'avez aucune information sur les candidats auxquels vous n'avez pas encore parlé. Après chaque entretien, vous avez le choix entre épouser le prétendant ou perdre à jamais la possibilité de le faire *(voir la figure 1)*. Si vous ne vous êtes pas mariée après le 99e entretien, alors vous devrez épouser le centième candidat. L'objectif est évidemment d'épouser le meilleur des 100 prétendants.

Choisir le bon prétendant

Le problème a une longue et riche histoire dans la littérature mathématique, où on le rencontre sous toutes sortes de noms : problème du mariage, de la secrétaire, de la princesse, de la dot, du meilleur choix... Certes, vous pouvez sélectionner le meilleur époux avec une probabilité d'au moins 1/100 en épousant tout simplement la première personne. Mais pouvez-vous faire mieux ? En fait, il existe une règle garantissant que vous épouserez le meilleur de tous les prétendants plus d'une fois sur trois. Et cette règle peut se transposer à d'autres scénarios.

Enrôlé dans l'armée de l'air américaine durant la guerre du Vietnam, John Elton, aujourd'hui mathématicien à l'Institut de technologie de Géorgie, avait transformé le problème du mariage en une combine pour se faire de l'argent à la caserne. J. Elton demandait à ses camarades aviateurs d'inscrire 100 nombres différents, positifs ou négatifs, aussi grands ou petits qu'ils voulaient, sur 100 bouts de papier, de les mettre à l'envers sur une table et de les mélanger. Il pariait avec eux qu'en retournant les papiers un par un, il saurait s'arrêter sur le plus grand nombre avant de tous les retourner.

J. Elton avait convaincu ses camarades qu'il était « évident » que ses chances de gagner étaient infimes et leur demandait dix dollars s'il gagnait, tandis qu'il leur offrait un dollar s'il perdait. Les parieurs se bousculaient. Même si J. Elton perdait presque les deux tiers des fois, il en gagnait dans plus du tiers. Et avec cette mise de dix contre un, il empocha une belle somme. Comment est-ce possible ?

Tout d'abord, il faut savoir qu'il existe une stratégie très simple pour gagner dans

L'ESSENTIEL

- ✔ Le problème de l'arrêt optimal consiste à déterminer quand il convient d'interrompre un processus faisant intervenir une part de hasard, afin de maximiser un gain moyen ou minimiser un coût moyen.
- ✔ Les mathématiciens ont déterminé des stratégies optimales dans de nombreux cas de figure, par exemple pour un jeu consistant à s'arrêter sur le maximum de points affichés par un dé lancé cinq fois au plus.
- ✔ Mais même certaines questions simples sur des tirages à pile ou face sont encore non résolues.

1. DANS LE PROBLÈME DU MARIAGE, une personne auditionne un à un les candidats. À chaque audition, soit elle épouse le prétendant, soit elle l'élimine définitivement. Une stratégie permet de choisir le meilleur candidat avec une probabilité assez élevée : auditionner environ un tiers des prétendants, puis s'arrêter sur le premier prétendant qui soit meilleur que ceux déjà passés.

✔ SUR LE WEB

T. Ferguson, **Optimal stopping and applications** : www.math.ucla.edu/fftom/Stopping/Contents.html

✔ BIBLIOGRAPHIE

F. T. Bruss et G. Louchard, **The odds algorithm based on sequential updating and its performance,** *Advances in Applied Probability*, vol. 41, n° 1, pp. 131-153, 2009.

N. Gauvrit, **Vous avez dit hasard ?**, Belin, 2009.

S. Jacka *et al.*, **Optimal stopping with applications**, numéro spécial de *Stochastics*, vol. 79, n° 1-4, 2007.

F. T. Bruss, **Le bon choix... raisonné,** *Pour la Science*, n° 335, pp. 56-61, septembre 2005.

F. T. Bruss, **Sum the odds to one and stop,** *Annals of Probability*, vol. 28, pp. 1384-1391, 2000.

T. Hill et U. Krengel, **Minimax-optimal stop rules and distributions in marriage problems,** *Annals of Probability*, vol. 19, pp. 342-353, 1992.

plus d'un quart des cas, ce qui lui aurait déjà suffi à prendre l'avantage. Qualifions un nombre observé de « record » s'il s'agit du nombre le plus grand rencontré jusqu'à présent. Supposons que vous retourniez la moitié des cartes ou bouts de papier (ou que vous interviewiez les 50 premiers candidats au mariage) sans vous arrêter, quelle que soit la valeur, même élevée, du nombre écrit. Vous vous arrêtez ensuite au premier record atteint. Si le deuxième nombre plus élevé des 100 cartes se trouve être dans les 50 premières que vous retournez, et que le plus élevé se trouve dans la seconde moitié (ce qui se produit une fois sur quatre), alors vous gagnez.

Gagner plus d'une fois sur trois

Cette stratégie est bonne, mais il en existe une meilleure encore *(voir la figure 2)*. N'observez que 37 cartes (ou époux potentiels) sans vous arrêter, puis arrêtez-vous au record suivant. John Gilbert et Frederick Mosteller, de l'Université Harvard, ont prouvé que cette stratégie est la meilleure et garantit que l'on s'arrêtera sur le plus grand nombre dans environ 37 pour cent des cas. Plus précisément, on montre qu'en observant $N/e \simeq 37$ cartes, N étant le nombre total de cartes et e étant la base des logarithmes naturels ($e = 2{,}71828\ldots$), on est sûr de gagner avec une probabilité supérieure à $1/e > 0{,}36$, quel que soit le nombre de cartes.

Parfois, le but est de s'arrêter sur l'un des k meilleurs nombres ou candidats parmi N. Autrement dit, vous gagnez si vous vous arrêtez sur l'un des k nombres les plus élevés. Aux jeux Olympiques ou aux courses, l'objectif correspond souvent au cas $k = 3$ (gagner une médaille ou être placé) plutôt que le tout ou rien du cas $k = 1$ (gagner la médaille d'or ou arriver en tête) qui est beaucoup plus risqué.

La stratégie optimale pour s'arrêter sur l'un des k meilleurs est semblable à celle pour s'arrêter sur le meilleur. Tout d'abord, il vous faut observer un nombre fixé de candidats sans vous arrêter, afin de constituer une base de référence. Puis, pour une autre série fixée de tentatives, arrêtez-vous si vous tombez sur un record. Comme ce sera provisoirement le meilleur, il est assez vraisemblable qu'il s'agira d'un des k meilleurs.

Si aucun record n'apparaît pendant cette durée, alors passez à l'étape suivante où vous vous arrêtez sur l'un des deux nombres les plus élevés pour une certaine durée fixée, et ainsi de suite. Pour $k = 2$, cette méthode garantit à plus de 57 pour cent de s'arrêter sur l'un des deux meilleurs, même s'il y a un million de cartes. Pour N petit, la probabilité est assez élevée. Ainsi, pour $N = 7$ et $k = 2$, la stratégie garantit que l'on gagne dans les deux tiers des cas *(voir la figure 3)*.

Maintenant, supposons que vous ayez à décider quand s'arrêter dans un choix entre seulement deux cartes ($N = 2$) : vous en retournez une et vous devez juger si le nombre inscrit est supérieur au nombre caché sous l'autre carte. L'étonnant résultat, avancé à l'origine par David Blackwell, de l'Université de Californie à Berkeley, est que l'on peut gagner à ce jeu plus d'une fois sur deux *(voir la figure 4)*.

À l'évidence, on peut gagner exactement une fois sur deux en s'arrêtant systématiquement sur le premier nombre, ou systématiquement sur le second, sans même les regarder. Mais pour gagner dans plus de la moitié des cas, on doit trouver un moyen d'utiliser l'information liée au premier nombre pour décider s'il convient de s'arrêter ou pas.

Une règle d'arrêt qui le permet est la suivante. Tout d'abord, générez un nombre aléatoire R selon une loi gaussienne (loi de distribution statistique classique, dont la courbe représentative – en abscisse les nombres, en ordonnée leurs fréquences de tirage – a une forme de cloche) à l'aide d'un ordinateur ou d'un autre dispositif. Retournez alors l'une des cartes et lisez le nombre écrit dessus. Si R est supérieur au nombre observé, continuez et retournez la seconde carte. Si R est inférieur, restez-en au nombre indiqué sur la première carte.

Comment une stratégie aussi simple garantit-elle de gagner dans plus de la moitié des cas ? Notons N_1 et N_2 les deux nombres inscrits, avec $N_1 < N_2$. Soit p la probabilité (inconnue *a priori*) de choisir, selon la loi gaussienne, un nombre R inférieur à N_1, et q la probabilité de choisir un R supérieur à N_2 *(voir la figure 4)*.

Supposons R inférieur à N_1 ; dans cette hypothèse, vraie avec la probabilité p, vous gagnez une fois sur deux, donc avec une probabilité $p/2$. Si R est supérieur à N_2, situation de probabilité q, vous gagnez encore une fois sur deux, donc avec la probabilité $q/2$. Mais si R tombe entre les deux nombres inscrits ($N_1 < R < N_2$), situation qui se produit avec une probabilité strictement positive égale à $1 - p - q$ (la distribution gaussienne attribue une probabilité positive à tout intervalle), alors vous gagnez à chaque fois, c'est-à-dire avec la probabilité $1 - p - q$.

Au total, en prenant en compte les trois situations possibles pour le nombre R choisi, vous gagnez avec la probabilité $p/2 + q/2 + 1 - p - q$. Or cette probabilité, qui s'écrit aussi $1/2 + (1 - p - q)/2$, est supérieure à $1/2$, puisque $1 - p - q$ est positif. Par exemple, si les deux nombres cachés sont 1 et π, la loi gaussienne donne p égal à environ 0,8413 et q égal à environ 0,0008 ; il s'ensuit qu'avec la stratégie indiquée, la probabilité de sélectionner le plus grand des deux nombres est supérieure à 57 pour cent.

Bien sûr, si la personne qui écrit les nombres sait que vous utilisez la stratégie gaussienne, elle peut, en choisissant des nombres N_1 et N_2 très proches, ramener votre probabilité de gagner au plus près de $1/2$. Si elle n'est pas complètement libre de choisir n'importe quels nombres, mais est obligée par exemple de prendre des entiers compris entre 1 et 100, alors il lui sera impossible de rendre votre probabilité de gagner arbitrairement proche de $1/2$.

Récurrence à rebours

Au lieu de ne disposer, comme précédemment, d'aucune information préalable sur les valeurs impliquées, on peut avoir une information complète sur les probabilités et les valeurs exactes de toutes les observations potentielles futures. Considérons un jeu consistant à lancer au maximum cinq fois un dé à six faces. Vous pouvez vous arrêter quand vous voulez et recevoir alors comme récompense autant de Krugerrands (pièces d'or sud-africaines, dont la valeur actuelle avoisine 750 euros) que de points affichés par le dé au moment où vous vous arrêtez.

Contrairement aux problèmes de mariage sans information, ici tout est connu. Les résultats possibles de chaque lancer sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et la probabilité de chacun à chaque lancer est d'un sixième. Il s'agit de trouver la règle d'arrêt qui maximise le nombre de Krugerrands que l'on peut espérer gagner en moyenne.

Si vous vous arrêtez toujours au premier lancer, par exemple, le gain sera simplement l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 avec une probabilité $1/6$ pour chacune. En d'autres termes, une fois sur six vous gagnerez un Krugerrand, une fois sur six vous en gagnerez deux, etc., ce qui donne l'espérance mathématique : $1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6)$ $+ 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) = 7/2$.

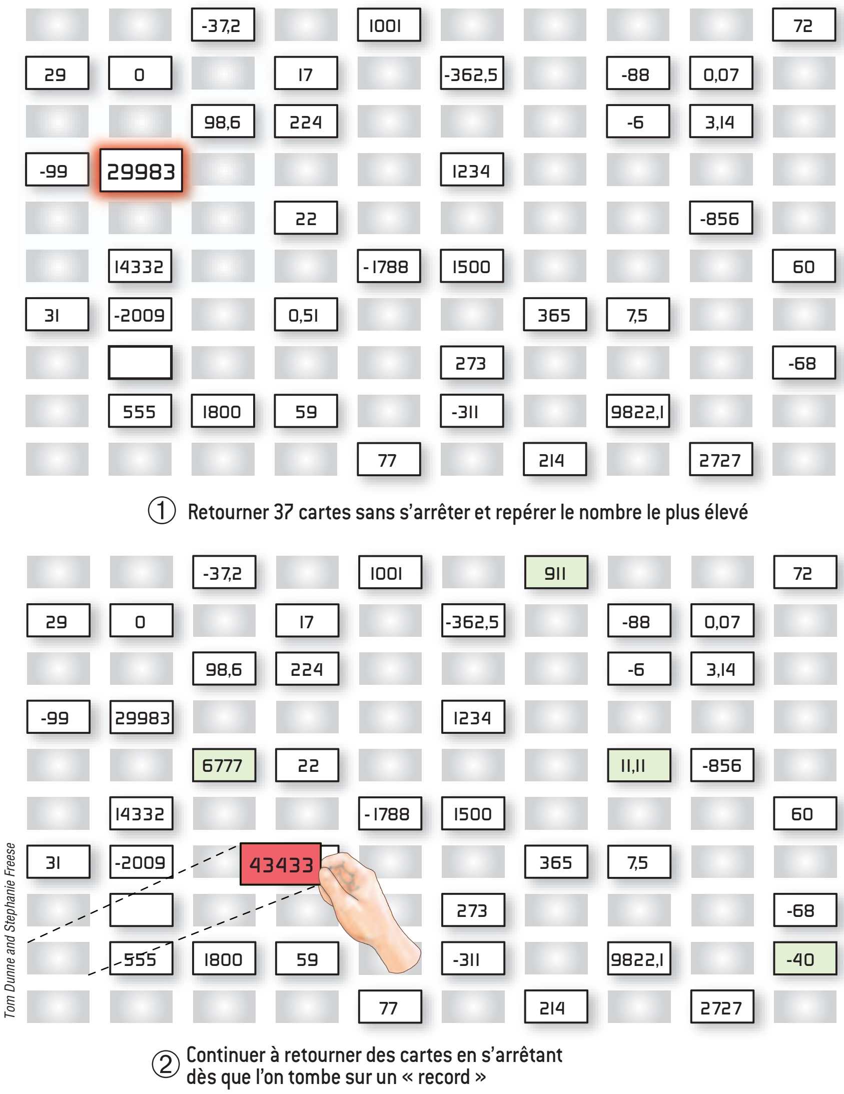
Ainsi, si vous vous arrêtez toujours au premier lancer, vous gagnerez 3,5 Krugerrands en moyenne. Bien sûr, il n'est pas optimal de s'arrêter au premier lancer s'il donne un 1, et il est toujours optimal de s'arrêter s'il donne un 6. Mais faut-il s'arrêter si l'on a obtenu un 5 au premier lancer ? Une méthode générale puissante pour résoudre ce type de problème est la « récurrence à rebours ».

Il est évidemment optimal de s'arrêter au premier lancer si la valeur affichée

L'AUTEUR

Theodore HILL est professeur émérite de mathématiques à l'Institut de technologie de Géorgie, aux États-Unis.

Nous remercions la revue *American Scientist* de nous avoir autorisés à reproduire cet article.



2. S'IL FAUT TROUVER le plus grand nombre parmi 100 écrits sur des cartes retournées, une bonne stratégie est de retourner d'abord 37 cartes, puis de continuer et de s'arrêter sur le premier nombre supérieur à ceux déjà vus. On démontre que l'on gagne ainsi dans 37 pour cent des cas.

par le dé est supérieure à celle attendue dans le cas où vous continuez à lancer le dé après avoir rejeté le premier lancer. Cela vous placerait dans un nouveau jeu où vous n'avez droit qu'à quatre lancers, dont l'espérance mathématique est également inconnue au départ. La stratégie optimale dans un problème à quatre lancers, à son tour, est de s'arrêter au premier lancer si la valeur obtenue est supérieure au gain espéré en continuant avec un problème à trois lancers, et ainsi de suite. On aboutit au problème à un lancer, pour lequel il n'y a qu'une stratégie, à savoir s'arrêter, et la récompense attendue est l'espérance mathématique d'un unique lancer de dé, dont nous avons vu qu'elle vaut 3,5 *(voir la figure 6)*.

Cette information nous donne à son tour la stratégie optimale d'un problème à deux lancers : s'arrêter au premier lancer si la valeur est supérieure à ce que vous espérez gagner en continuant, c'est-à-dire supérieure à 3,5. Nous connaissons donc maintenant la stratégie optimale pour un problème à deux lancers (s'arrêter au premier lancer si c'est un 4, un 5 ou un 6, continuer sinon) et cela permet de calculer la récompense espérée.

Dans un problème à deux lancers, on gagne 4, 5 ou 6 au premier lancer avec une probabilité de 1/6 chacun, et l'on s'arrête. Sinon (quand le premier lancer est un 1, un 2 ou un 3, situation qui se produit une fois sur deux), on continue, auquel cas on s'attend à gagner 3,5 en moyenne. Ainsi, la récompense attendue pour le problème à deux lancers est :
$4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) + (1/2)(3{,}5) = 4{,}25.$

Stratégie optimale

Cela fournit maintenant la stratégie optimale pour un problème à trois lancers, à savoir s'arrêter si le premier lancer est un 5 ou un 6 (c'est-à-dire supérieur à 4,25), et sinon continuer et ne s'arrêter que si le second lancer est un 4, 5 ou 6, et dans le cas contraire poursuivre avec un troisième et dernier lancer. La connaissance de cette récompense attendue pour trois lancers donne à son tour la stratégie optimale pour un problème à quatre lancers : ne s'arrêter au premier lancer que s'il donne un 5 ou un 6, s'arrêter au second lancer si c'est un 5 ou un 6, au troisième si c'est un 5 ou un 6, au quatrième si c'est un 4, un 5 ou un 6, et sinon aller jusqu'au lancer final. Cette stratégie garantit que vous gagnerez 5,12 Krugerrands en moyenne, et aucune stratégie n'est meilleure.

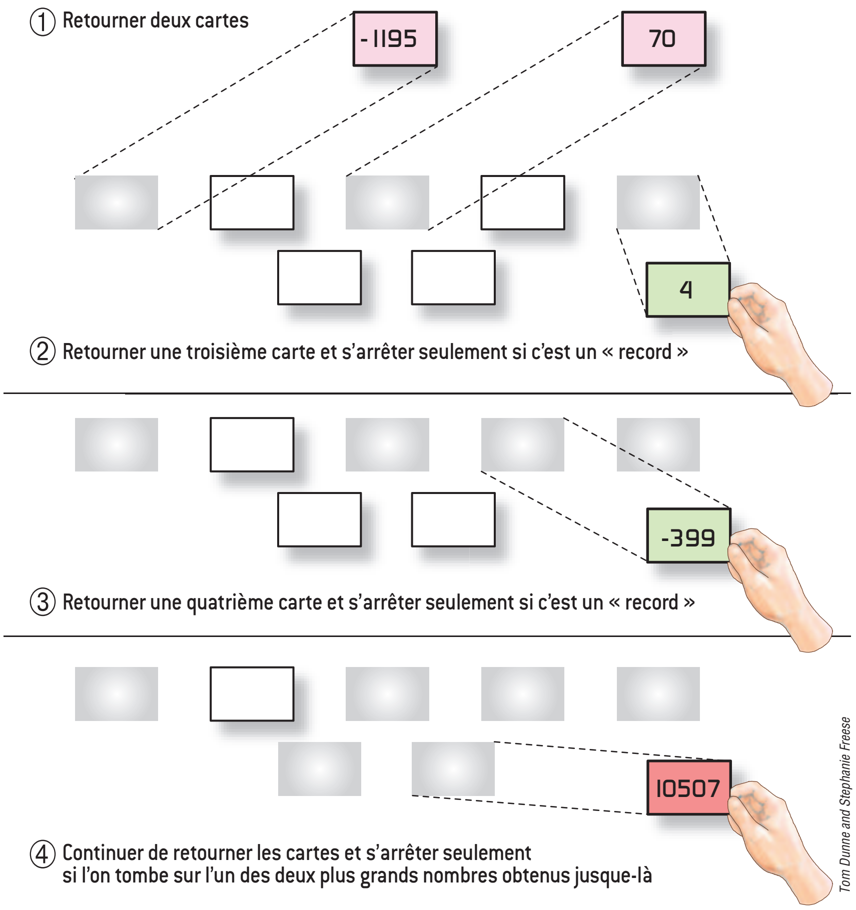
La méthode de la récurrence à rebours est polyvalente, et fonctionne aussi bien lorsque les valeurs du processus ne sont pas indépendantes (comme elles sont supposées l'être lorsqu'on lance plusieurs fois le dé), ou s'il s'agit de minimiser une espérance mathématique telle que le coût.

Supposons qu'une entreprise doive acheter son approvisionnement hebdomadaire en énergie le lundi, mardi ou mercredi précédent et que la probabilité des prix à venir puisse être estimée sur la base de statistiques passées. Par exemple, si le lundi l'acheteur a l'occasion de payer l'énergie pour la semaine suivante à un prix de 100, il peut savoir d'expérience qu'il y a une probabilité 1/2 pour que le prix du mardi soit 110, et 90 sinon. De plus, il sait que si le prix est égal à 110 le mardi, alors le prix sera de 115 le mercredi avec une probabilité égale à 1/3, et de 100 autrement ; et que s'il vaut 90 le mardi, il a autant de chances de valoir 100 que 85 le mercredi.

Par récurrence à rebours, on voit que la règle optimale pour le mardi est de ne pas acheter si le prix est de 110, puisque 110 est supérieur à l'espérance mathématique du prix s'il attend mercredi pour acheter, espérance égale à :
$(1/3)(115) + (2/3)(100) = 105.$

De la même façon, si le prix mardi est de 90, il est optimal d'acheter. En remontant jusqu'au lundi, puisque 100 est supérieur à l'espérance de prix s'il continue (à savoir $(1/2)(105) + (1/2)(90) = 97{,}5$), il est optimal de ne pas acheter le lundi. Ces éléments réunis constituent la stratégie optimale d'arrêt.

Dans le cas où l'information est complète, avec pour objectif de s'arrêter sur l'une des k plus grandes valeurs, on ignorait quelles étaient les meilleures probabilités possibles de gagner pour des séquences finies générales de variables aléatoires indépendantes. En utilisant à la fois la récurrence normale et celle à rebours, et une classe de distributions



3. S'IL S'AGIT DE S'ARRÊTER dès l'obtention d'une des k meilleures valeurs, on peut là aussi augmenter ses chances. Dans un scénario où l'on désire obtenir un des deux meilleurs choix sur sept, on peut gagner deux fois sur trois avec la stratégie indiquée.

statistiques nommées pyramides de Bernoulli, Douglas Kennedy, de l'Université de Cambridge, et moi avons découvert ces probabilités optimales. Nous avons prouvé vers 1992 que pour toute séquence finie de variables aléatoires indépendantes, il y a toujours une règle d'arrêt qui tombe sur la valeur la plus élevée avec une probabilité au moins égale à $1/e$, et une règle d'arrêt qui tombe sur l'une des deux valeurs les plus élevées avec une probabilité au moins égale à $(1+\sqrt{2})\exp(-\sqrt{2})$, soit environ 0,59 – c'est le mieux que l'on puisse faire. Les probabilités de s'arrêter sur l'une des k valeurs les plus élevées ont des formules similaires.

Notons que les ordinateurs n'ont été d'aucune aide pour résoudre ce problème. En fait, tous les problèmes décrits dans cet article ont été résolus en utilisant des outils mathématiques classiques, en travaillant exemple après exemple avec du papier et un crayon ; en résolvant le cas avec deux, trois, puis quatre inconnues ; en cherchant des régularités ; en attendant que viennent des idées lumineuses ; enfin, en cherchant à démontrer formellement chaque étape.

Quand l'information n'est que partielle

Le cas où l'information n'est que partielle est le plus difficile. D'ordinaire, on ne sait pas d'avance combien de candidats il y aura à un emploi donné, ni les probabilités des valeurs futures des actions en Bourse. Dans ces situations, une méthode de résolution consiste à utiliser les outils de la théorie des jeux. Le problème de l'arrêt peut y être envisagé comme celui d'un décideur jouant contre un adversaire qui peut fixer les valeurs et les probabilités à sa guise.

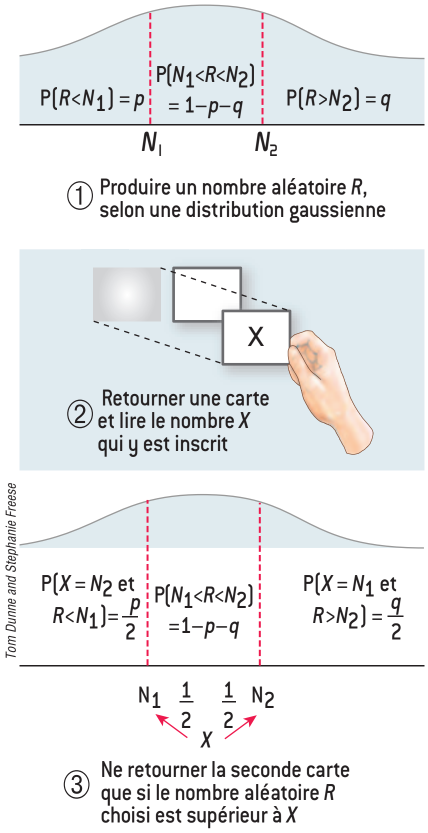
Ulrich Krengel, de l'Université de Göttingen, et moi-même avons utilisé cette technique pour découvrir la stratégie optimale dans le problème dit du mariage, où seule une borne supérieure au nombre de candidats est connue.

À titre d'exemple concret, considérons le problème consistant à sélectionner le plus grand nombre dans un chapeau contenant au moins une, et au plus cinq, cartes numérotées (si vous ne vous arrêtez pas et qu'il ne reste aucune carte, vous avez perdu). Nous avons démontré que la stratégie optimale dans ce cas est de s'arrêter à la première carte avec la probabilité 26/75. Si vous ne vous arrêtez pas à la première carte, alors vous continuez jusqu'à la deuxième carte, s'il y en a une. Si le nombre de la deuxième carte est supérieur à celui de la première, arrêtez-vous avec la probabilité 26/49. Sinon, continuez, en vous arrêtant au premier record (ou lorsque vous avez épuisé vos cartes ou que vous êtes forcé de choisir le nombre de la cinquième carte). Cela garantit une probabilité de 26/75 de s'arrêter sur le nombre le plus élevé, quel que soit le nombre (entre un et cinq) de cartes déposées dans le chapeau.

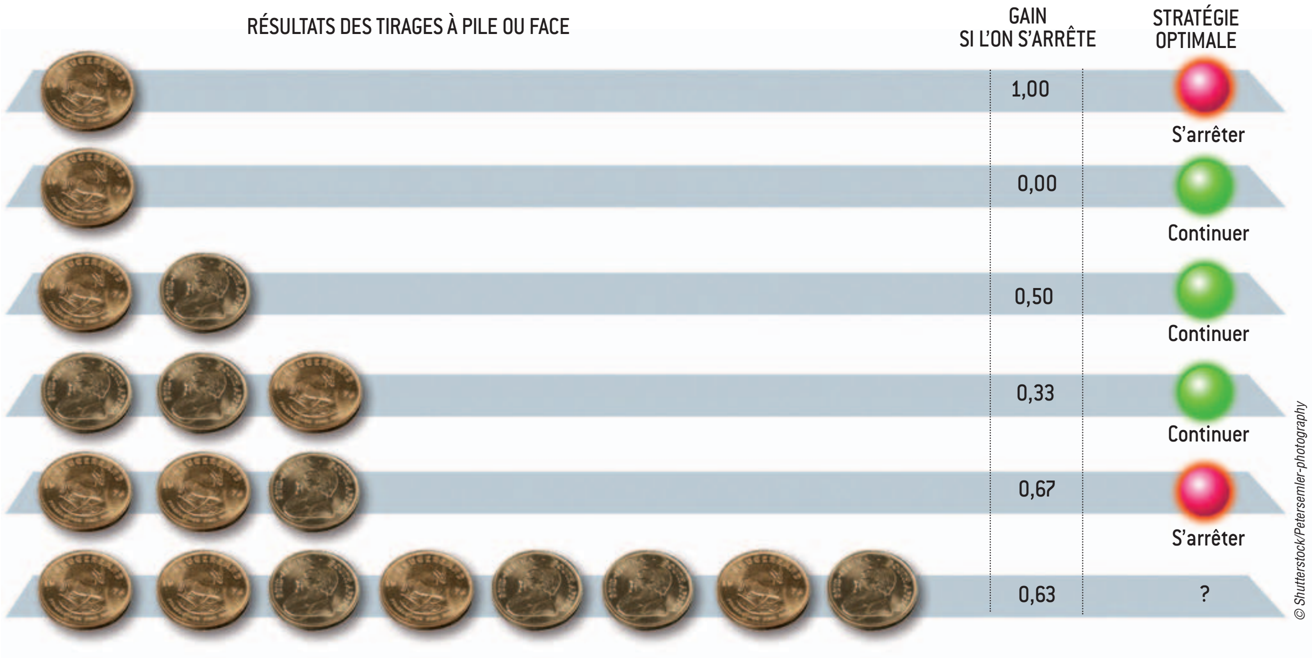
Il n'existe pas de meilleure stratégie. Nous avons trouvé les formules exactes pour toutes les limites possibles sur le nombre maximum de cartes, et les probabilités de gagner sont étonnamment élevées. Par exemple, si vous savez seulement qu'il y a entre 1 et 100 cartes dans le chapeau, il est encore possible de gagner environ une fois sur cinq. On peut utiliser exactement la même méthode pour obtenir les règles d'arrêt optimal dans de nombreux problèmes de la vie courante, par exemple quand un employeur veut embaucher le meilleur vendeur sur le marché, connaît le nombre maximum de candidats au poste, mais ignore combien d'entre eux ont déjà accepté une autre offre.

Dans un autre type de problème d'arrêt impliquant une information partielle, l'observateur connaît exactement la longueur de la séquence (par exemple le nombre de cartes), mais il ne dispose que d'une information partielle sur les valeurs (aléatoires) écrites sur les cartes. Au lieu de n'avoir aucune information du tout, ou de connaître toutes les valeurs et probabilités possibles, il pourrait ne connaître que la valeur moyenne et l'écart type de chaque variable aléatoire. Dans le cas où les variables sont indépendantes, Frans Boshuizen, de l'Université libre d'Amsterdam, et moi-même avons réussi à déterminer les règles d'arrêt optimal, mais les techniques que nous avons utilisées, issues notamment de la théorie des jeux, échouent dans la plupart des autres problèmes d'arrêt à information partielle.

Bien que de nombreux problèmes d'arrêt aient été résolus, il subsiste des problèmes très simples qui, de manière très frustrante, restent non résolus, même parmi ceux qui font intervenir une information complète. Mon préféré est le suivant. Vous tirez à pile ou face avec une pièce non truquée, en vous arrêtant quand vous voulez. La récompense est le nombre moyen de faces obtenues (nombre de faces divisé par le nombre



4. MÊME LORSQU'IL S'AGIT DE CHOISIR entre deux cartes seulement, on peut réussir plus d'un coup sur deux. Il faut pour cela disposer d'un moyen de produire des nombres aléatoires R, tirés selon une loi continue, par exemple la loi gaussienne (loi en forme de cloche). N_1 et N_2 désignent ici les nombres portés par les deux cartes ; X est le nombre porté par la première carte retournée ; l'écriture $P(R < N_1) = p$, par exemple, signifie que la probabilité que R soit inférieur à N_1 est égale à p.



5. QUAND CONVIENT-IL D'ARRÊTER une séquence de tirages à pile ou face pour maximiser le nombre moyen de faces obtenues ? Cette question d'une simplicité trompeuse reste un problème non résolu. Il est certain qu'il ne faut pas s'arrêter s'il n'y a pas une majorité absolue de faces. Mais quelle proportion de faces faut-il viser ? On ne le sait pas exactement.

de lancers) au moment où vous vous arrêtez *(voir la figure 5)*.

Si votre premier lancer est une face et que vous vous arrêtez, votre récompense est ainsi de un Krugerrand. Puisque vous ne pourrez jamais avoir plus de 100 pour cent de faces, il est optimal de s'arrêter dans ce cas. Si, en revanche, le premier lancer tombe sur le côté pile, il est préférable de ne pas s'arrêter tout de suite, puisque votre récompense serait nulle. Supposez que le premier tirage soit pile, et le second face. Vous pouvez vous arrêter là et recevoir un demi-Krugerrand, ou bien continuer à tirer. Un peu de réflexion montre qu'il n'est jamais optimal de s'arrêter avec un demi-Krugerrand ou moins. En effet, en vertu de la loi des grands nombres, plus le nombre de lancers est grand, plus la proportion de faces s'approche de 50 pour cent, en oscillant aléatoirement au-dessus et au-dessous de cette valeur. S'arrêter à 50 pour cent n'est tout simplement pas assez ambitieux.

Avec un peu plus de difficulté, on montre que s'arrêter au troisième tirage après pile-face-face est optimal, et que s'arrêter la première fois qu'on observe plus de faces que de piles est optimal pendant un certain temps. Mais s'arrêter la première fois que vous avez davantage de faces que de piles ne reste pas éternellement optimal. Au bout d'un certain temps, on devrait s'arrêter seulement si l'on a deux faces de plus que de piles, puis après un deuxième temps critique, s'arrêter seulement si l'on a trois faces d'avance, et ainsi de suite.

Nombre maximal de lancers du dé	Arrêter si le premier lancer donne :	Gain moyen
1	1, 2, 3, 4, 5 ou 6	3,5
2	4, 5 ou 6	4,25
3	5 ou 6	4,67
4	5 ou 6	4,94
5	5 ou 6	5,13

© Shutterstock/Appler

6. ON CONSIDÈRE LE JEU consistant à lancer N fois ($N < 6$) au plus un dé à six faces, en s'arrêtant quand on veut. On gagne un nombre de pièces égal à ce qu'indique le dernier lancer. Pour N fixé, la stratégie optimale consiste à s'arrêter au premier lancer s'il donne l'un des résultats indiqués, et sinon d'effectuer un nouveau lancer et d'appliquer la stratégie correspondant à $N - 1$ lancers (récurrence à rebours).

La démonstration de ce fait n'est pas aisée, et la liste complète des temps critiques n'est pas connue. La récurrence à rebours ne fonctionne pas pour ce problème puisqu'il n'y a *a priori* pas de fin à la séquence et donc pas de temps futur à partir duquel on puisse raisonner à reculons. Malgré des avancées très récentes de Wolfgang Stadje, de l'Université d'Osnabrück, en Allemagne, la règle optimale exacte pour toutes les séquences de faces et de piles est inconnue.

Néanmoins, le domaine général de l'arrêt optimal, en particulier avec ses applications aux marchés financiers, continue à se développer à vive allure. En fait, certains spécialistes trouvent que ce rythme a été trop rapide et que les modèles informatiques de l'évaluation des options financières et des produits dérivés sont à l'origine de l'actuelle crise économique. Mais ce n'est pas la théorie qui est en cause. Comme d'autres, j'en attribue la responsabilité à la confiance aveugle des décideurs dans les prédictions des modèles informatiques. En fait, de nouvelles idées et découvertes en matière d'arrêt optimal, y compris de meilleures estimations du risque que les modèles mathématiques soient erronés, sont exactement ce dont nous avons besoin – non seulement comme guide pour savoir quand mettre fin aux subventions, par exemple, mais aussi pour faire face à de nombreux autres problèmes cruciaux, notamment quand arrêter d'utiliser des combustibles fossiles ou de stocker des armes nucléaires.